



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

SUPERFICIE CILÍNDRICA

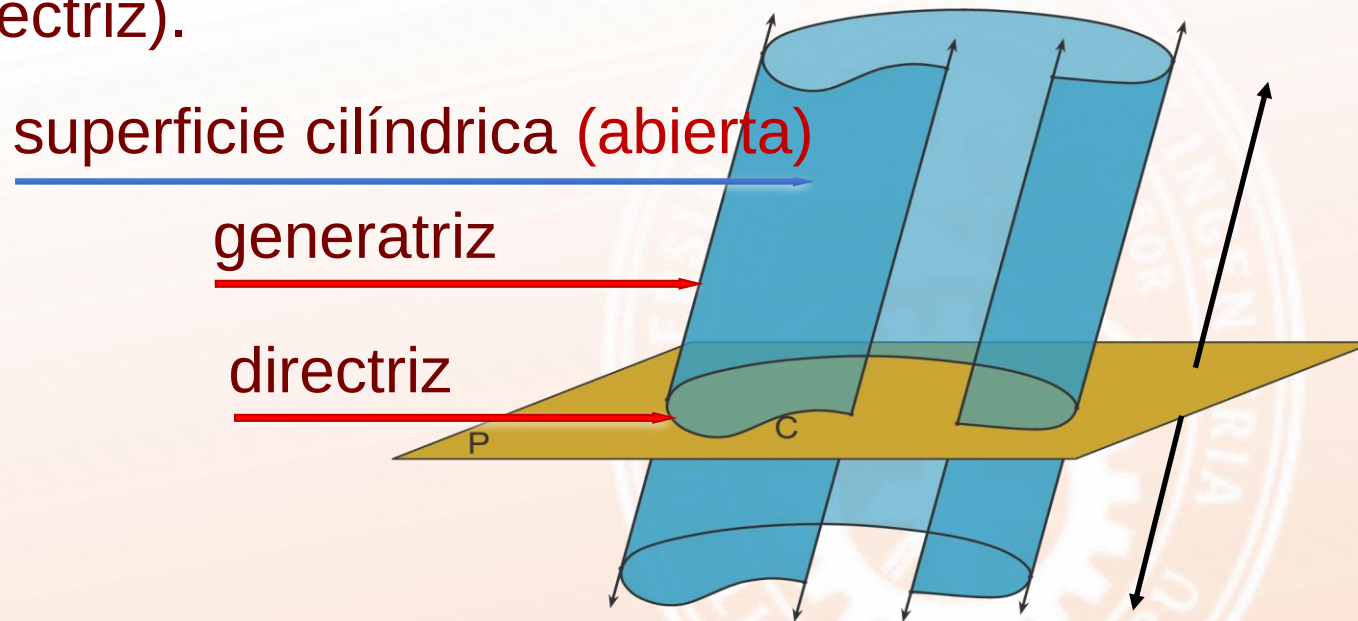
**CICLO
PRE
2024-I**



SUPERFICIE CILÍNDRICA

DEFINICIÓN

Dadas una recta y una curva simple abierta o cerrada, tal que la recta sea secante al plano que contiene a la curva. Se denomina **superficie cilíndrica**, a la superficie generada por una recta (generatriz) al trasladarse paralelamente a la recta dada, por todos los puntos de la línea curva (directriz).

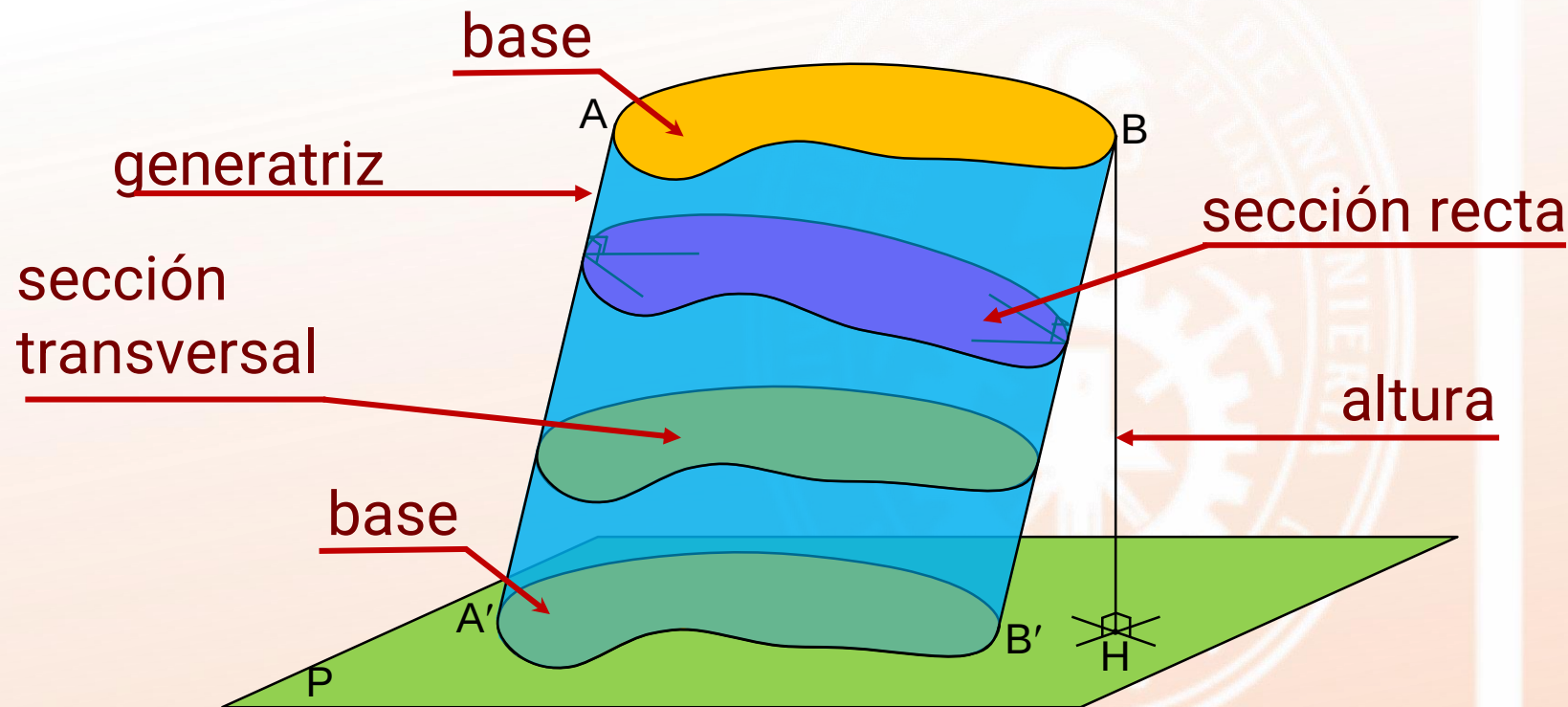


OBSERVACIÓN Si la directriz es cerrada, entonces se denomina superficie cilíndrica cerrada, en caso contrario se denomina abierta.

CILINDRO

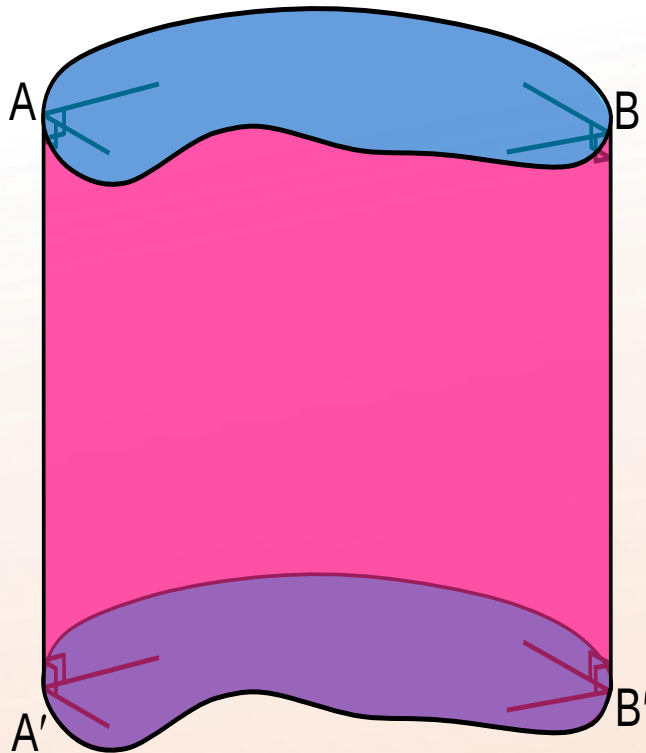
DEFINICIÓN

Se denomina **cilindro**, a la unión de las secciones determinadas por dos planos paralelos entre si y secantes a una superficie cilíndrica cerrada y la parte de esta superficie comprendida entre los planos paralelos.



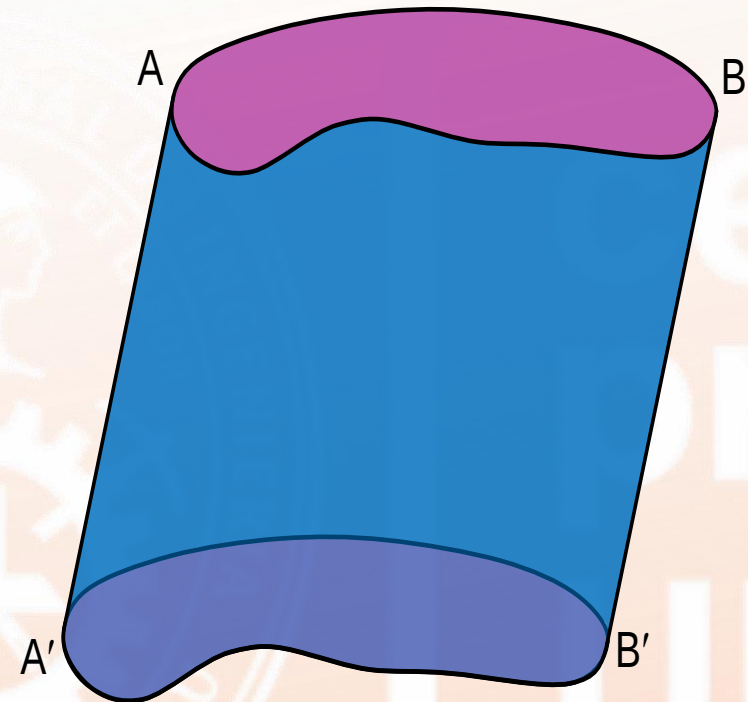
CILINDRO RECTO

Es el cilindro cuyas generatrices son perpendiculares a las bases.



CILINDRO OBLICUO

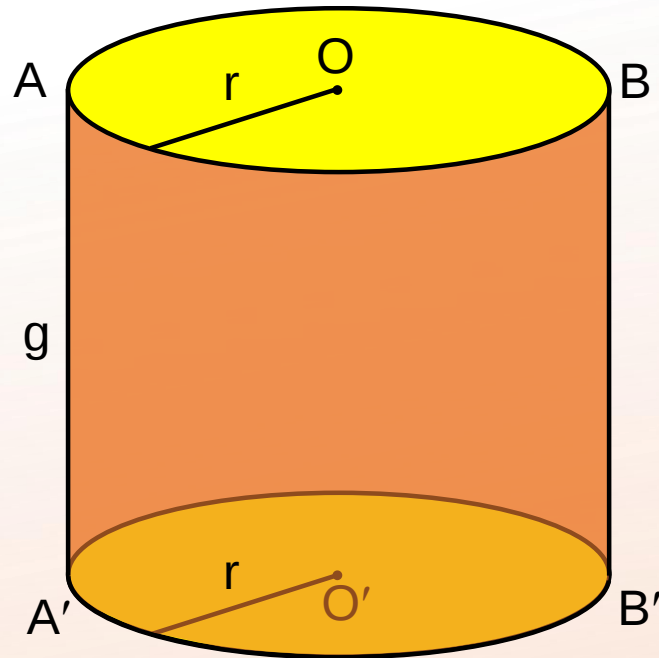
Es el cilindro cuyas generatrices no son perpendiculares a las bases.



CILINDRO CIRCULAR RECTO

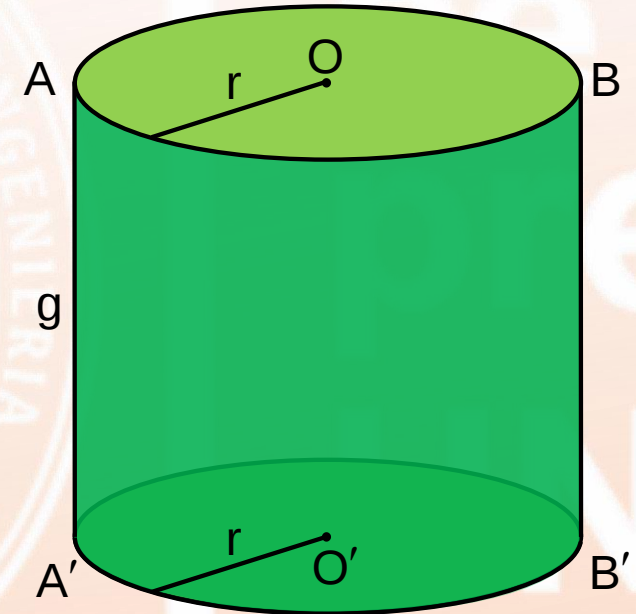
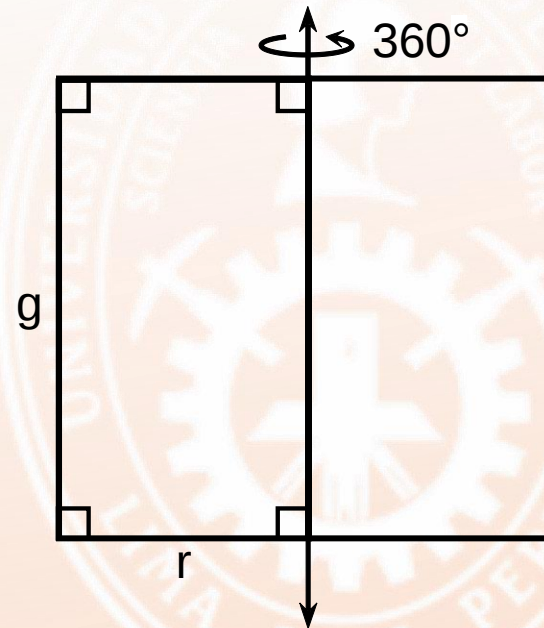
DEFINICIÓN

Es el cilindro recto de bases circulares.



OBSERVACIÓN

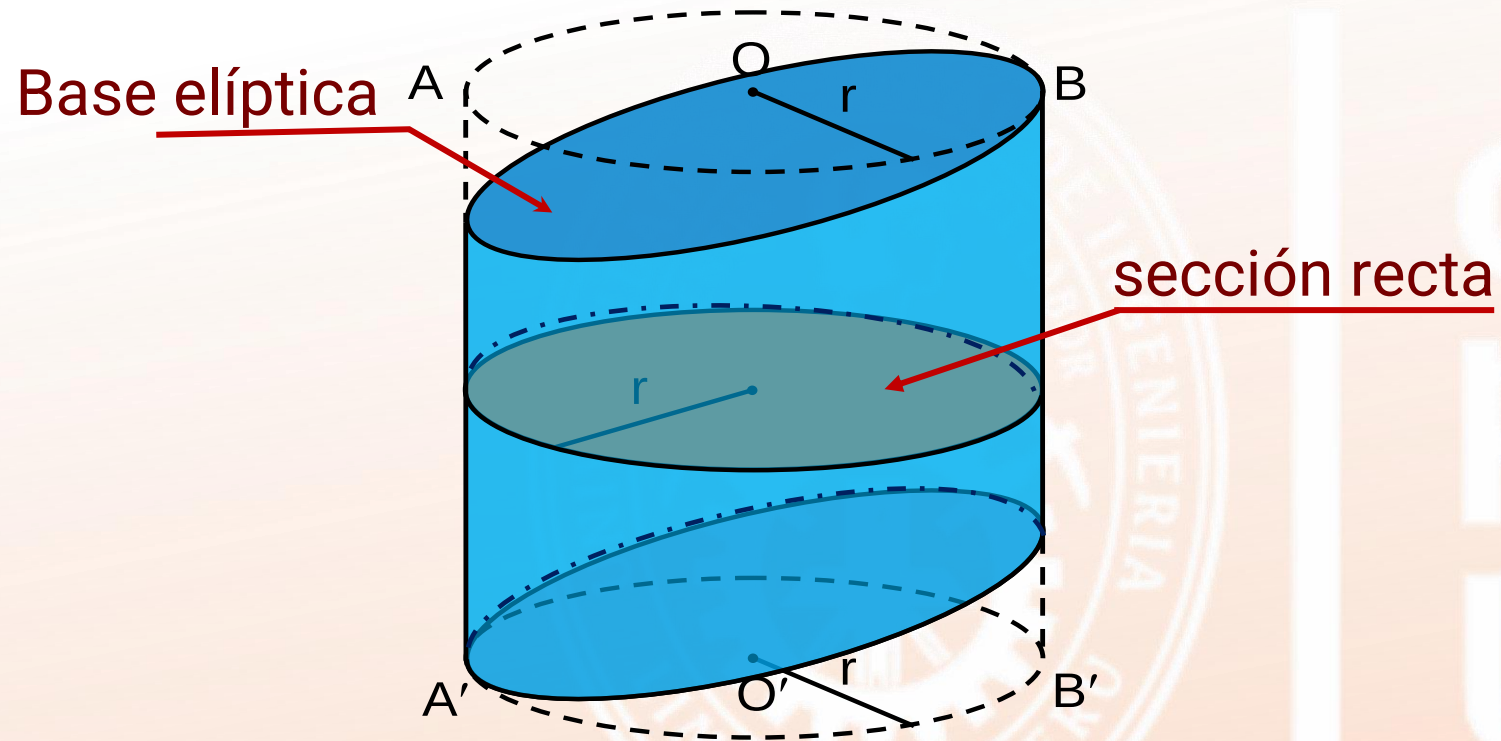
También se denomina cilindro de revolución, ya que es generado por un rectángulo que gira 360° alrededor de una recta que contiene a uno de los lados considerado como eje de giro.



CILINDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR

DEFINICIÓN

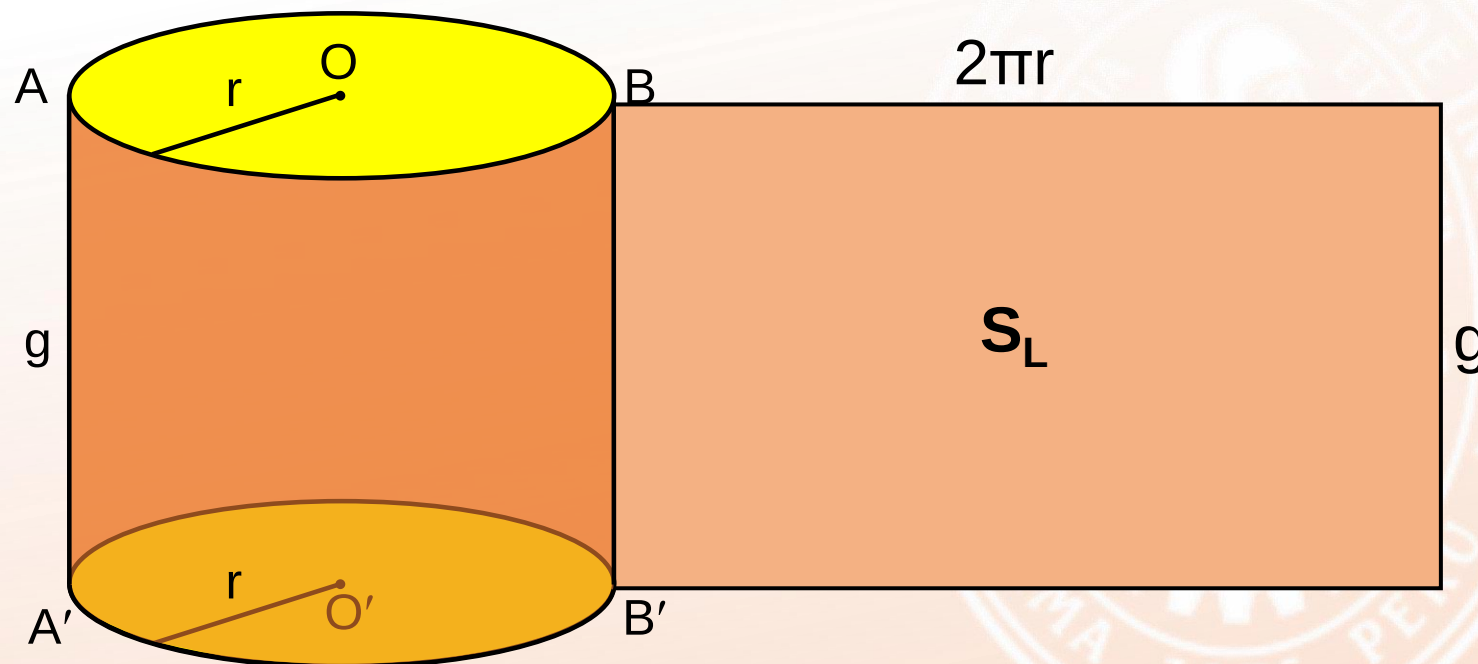
Es el cilindro oblicuo cuya sección recta es un círculo.



ÁREA LATERAL DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

TEOREMA

El área de la superficie lateral de un cilindro circular recto, es igual al producto de las longitudes de la circunferencia de la base y la generatriz.

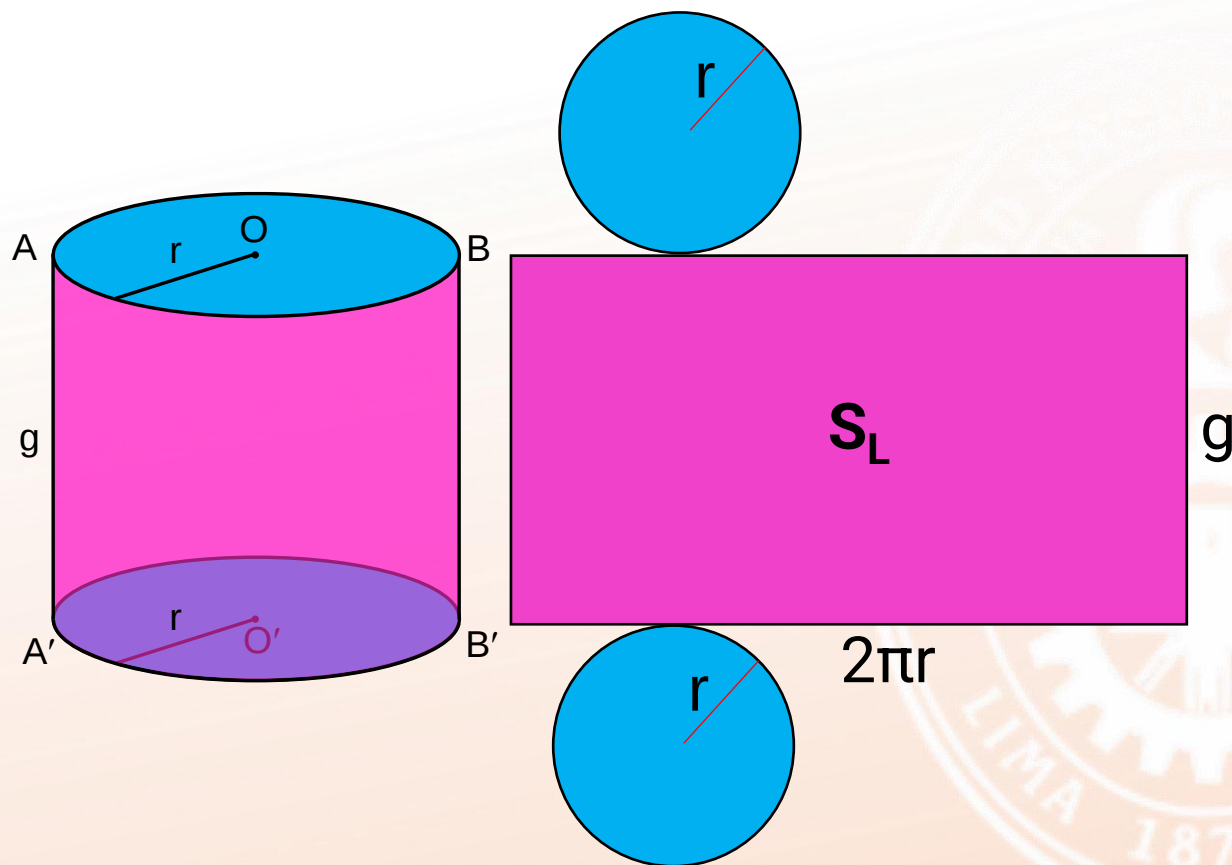


$$S_L = (2\pi r)g$$

ÁREA TOTAL DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

TEOREMA

El área de la superficie total de un cilindro circular recto, es igual a la suma del área de la superficie lateral y las áreas de las bases.



$$S_T = (2\pi r)(g + r)$$

EJERCICIO 01

En un cilindro circular recto, el área lateral es igual a S y una sección transversal determina dos cilindros. En uno de ellos la altura es congruente con el radio de la base ¿Cuál es el área total del otro cilindro determinado?

A) $\frac{S}{4}$

B) $\frac{S}{3}$

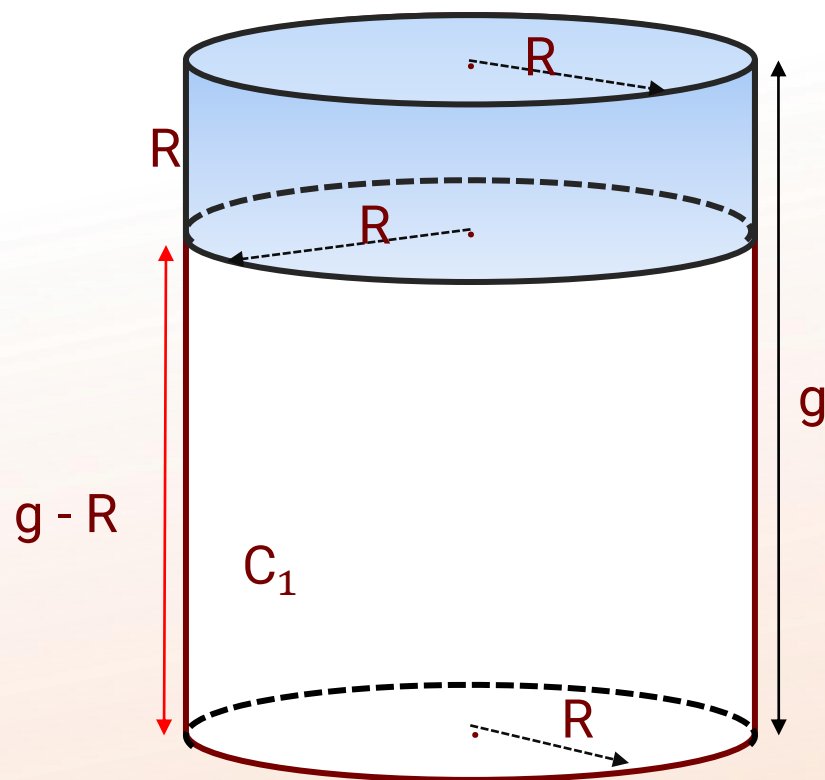
C) $\frac{S}{2}$

D) S

E) $2S$

RESOLUCIÓN 01

En un cilindro circular recto, el área lateral es igual a S y una sección transversal determina dos cilindros. En uno de ellos la altura es congruente con el radio de la base ¿Cuál es el área total del otro cilindro determinado?



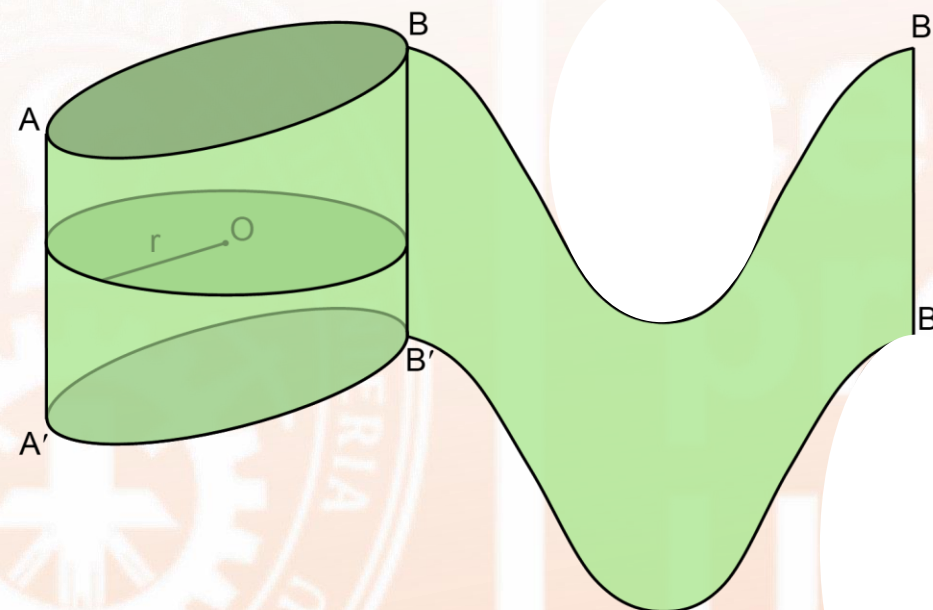
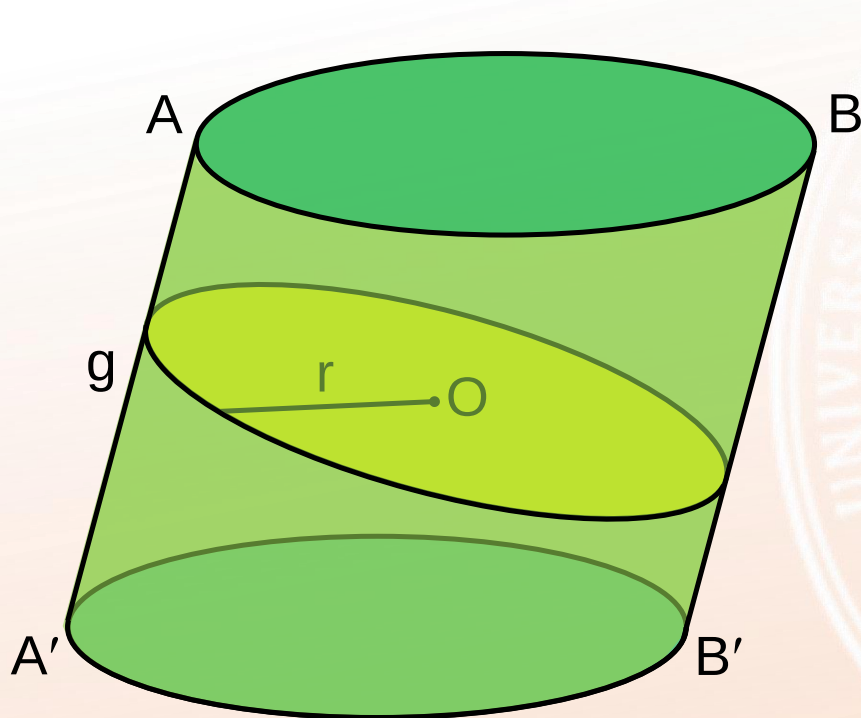
- Dato: $S_L = S = 2\pi Rg$
- Calcule: S_T del cilindro C_1
- $S_T = 2\pi R(g - R) + 2\pi R^2$
 $S_T = 2\pi Rg - 2\pi R^2 + 2\pi R^2$
 $S_T = 2\pi Rg$
 $S_T = S$

Clave: D

ÁREA LATERAL DE UN CILINDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR

TEOREMA

El área de la superficie lateral de un cilindro oblicuo de sección recta circular, es igual al producto del perímetro de la sección recta y la longitud de la generatriz.



$$S_L = (2\pi r)g$$

EJERCICIO 02

En un cilindro oblicuo, M y N son centros de las bases y un diámetro de la base inferior contiene a N. Si los ángulos AMN y ABM son congruentes y $MB = 2u$, entonces la longitud (en u) de la generatriz del cilindro es

A) 1

B) $\sqrt{2}$

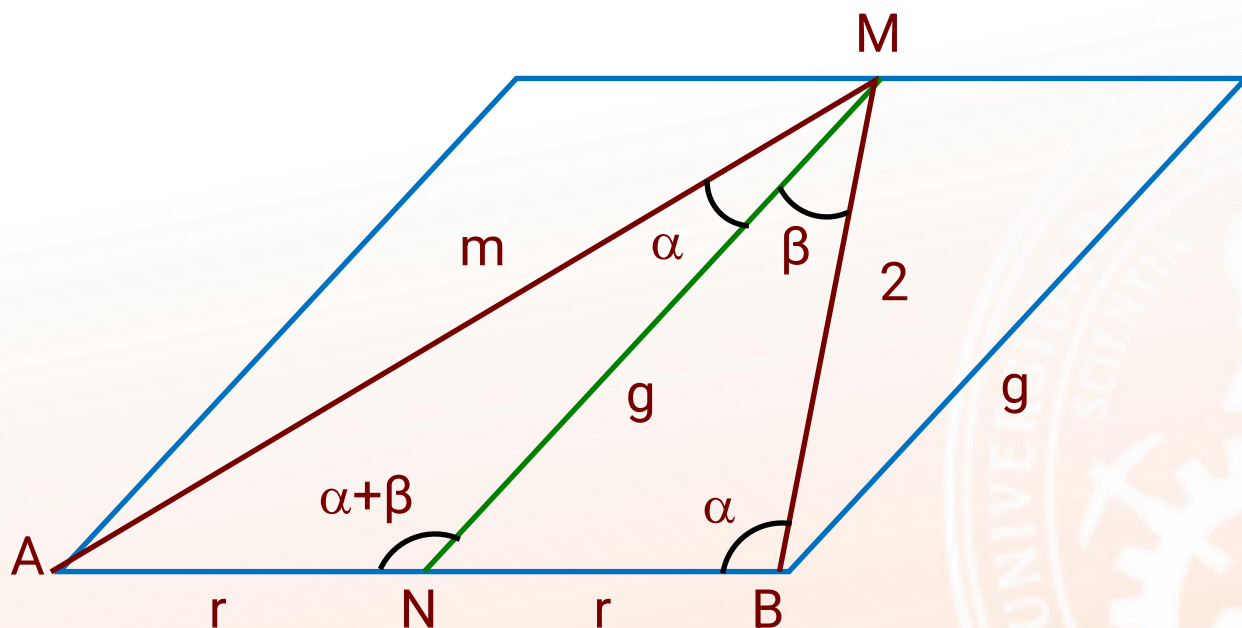
C) $\frac{3}{4}$

D) $\sqrt{3}$

E) $\frac{4}{3}$

RESOLUCIÓN 02

En un cilindro oblicuo, M y N son centros de las bases y un diámetro de la base inferior contiene a N. Si los ángulos AMN y ABM son congruentes y $MB = 2u$, entonces la longitud (en u) de la generatriz del cilindro es



- $\triangle ANM \sim \triangle AMB$

$$\frac{g}{2} = \frac{r}{n} = \frac{m}{2r} \dots (1)$$

$$n^2 = 2r^2 \rightarrow n = r\sqrt{2} \dots (2)$$

- (2) en (1) :

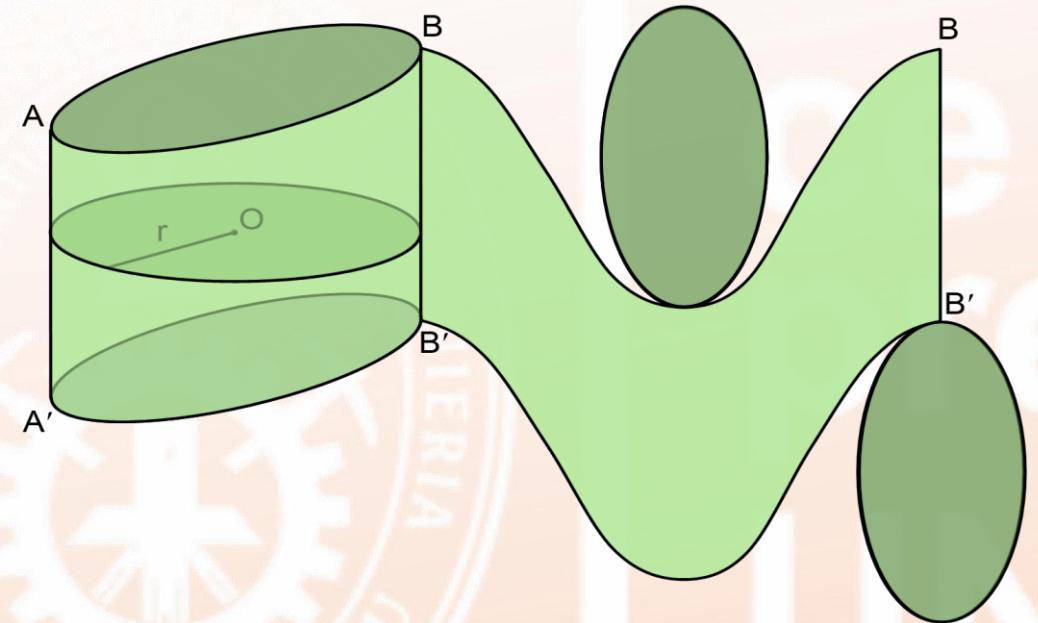
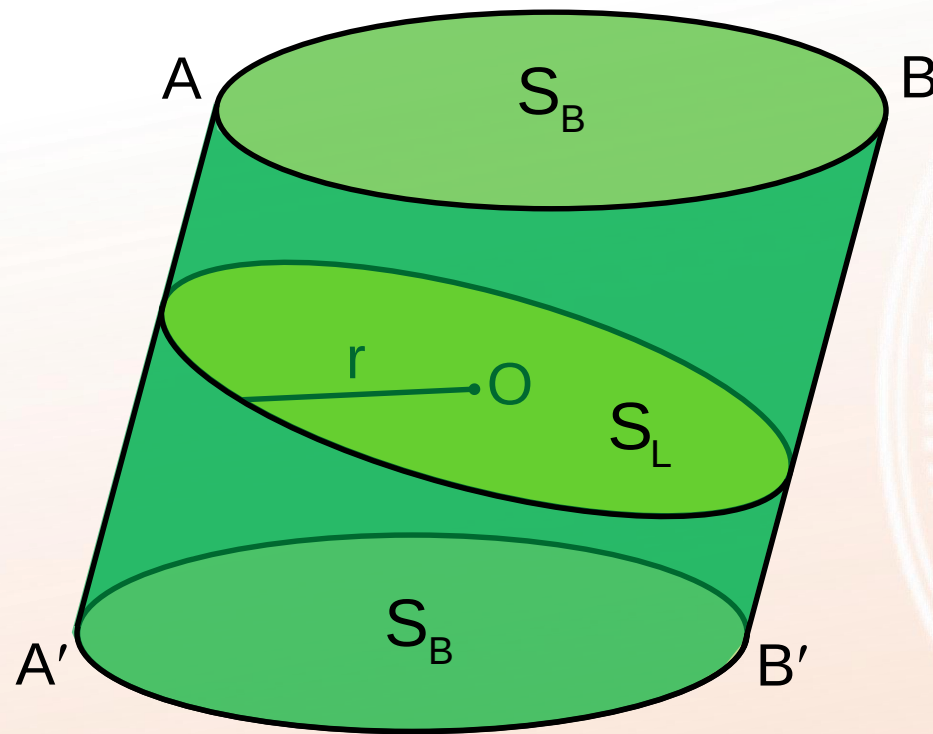
$$\frac{g}{2} = \frac{r}{r\sqrt{2}} \rightarrow g = \sqrt{2}$$

Clave: B

ÁREA TOTAL DE UN CILINDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR

DEFINICIÓN

El área de la superficie total de un cilindro oblicuo de sección recta circular, es igual a la suma del área lateral y las áreas de las bases.

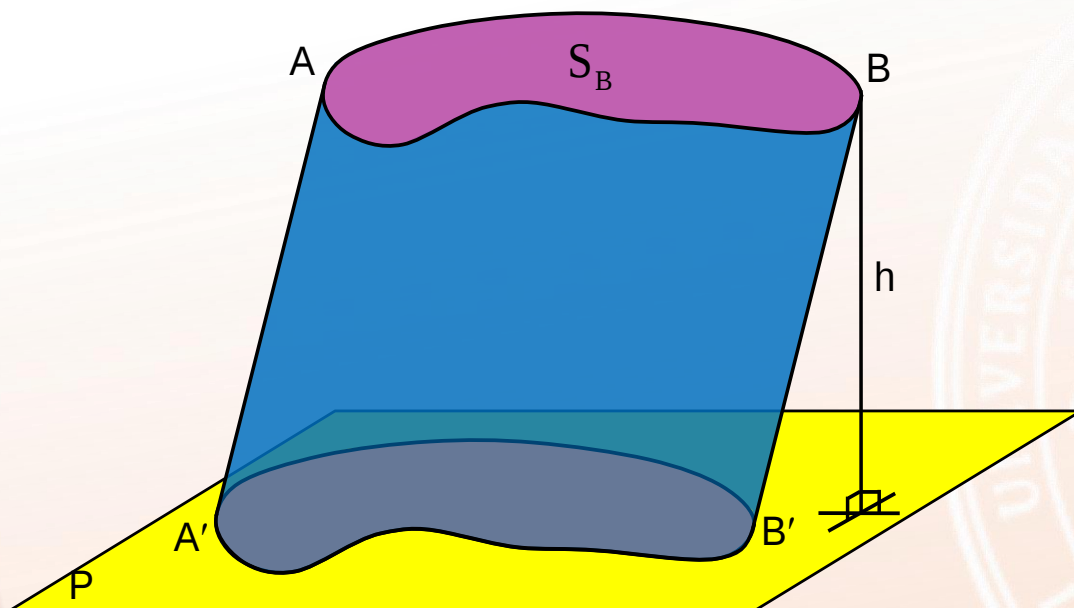


$$S_T = S_L + 2S_B$$

VOLUMEN DEL SÓLIDO DETERMINADO POR UN CILINDRO

TEOREMA

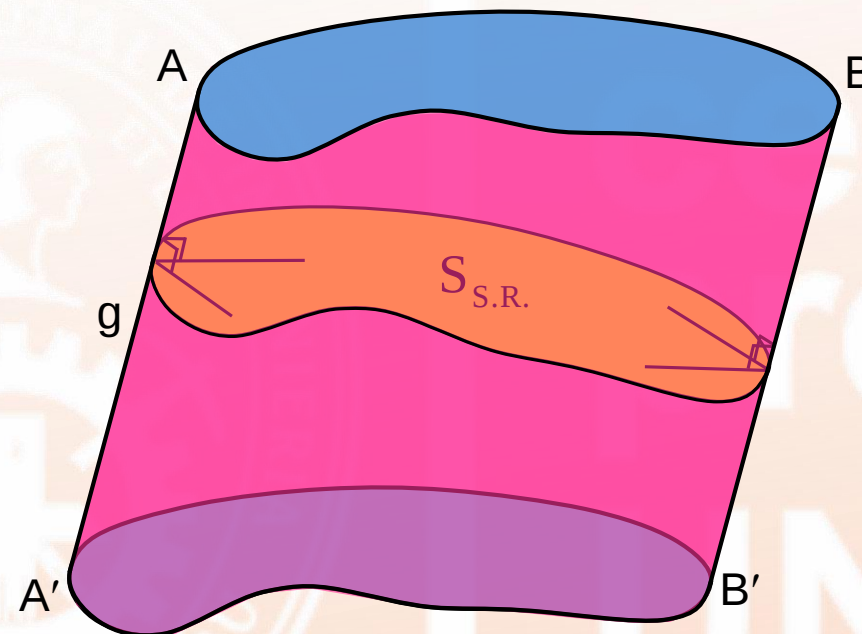
El volumen de un sólido determinado por un cilindro, denominado también sólido cilíndrico, es igual al producto del área de la base y la longitud de la altura del cilindro.



$$V = (S_B)h$$

TEOREMA

El volumen de un sólido cilíndrico es igual al producto del área de la sección recta y la longitud de una generatriz del cilindro.



$$V = (S_{S.R.})g$$

EJERCICIO 03

El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es una región cuadrada cuyo lado mide L . Calcule el volumen del sólido determinado por el cilindro.

A) $\frac{L^3}{4\pi}$

D) $\frac{3\pi L^3}{4}$

B) $\frac{\pi L^3}{4}$

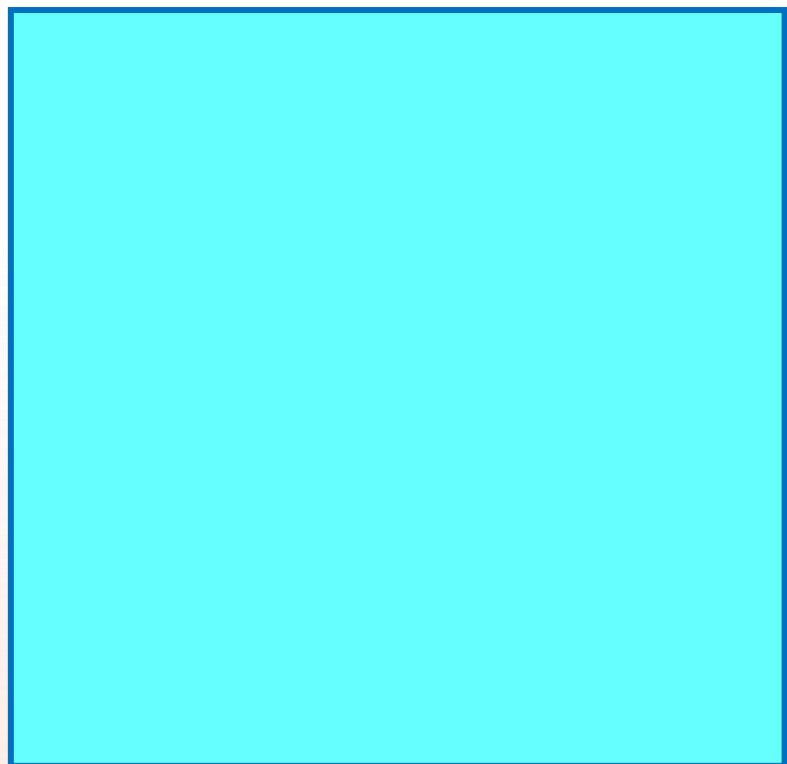
E) πL^3

C) $\frac{\pi L^3}{3}$

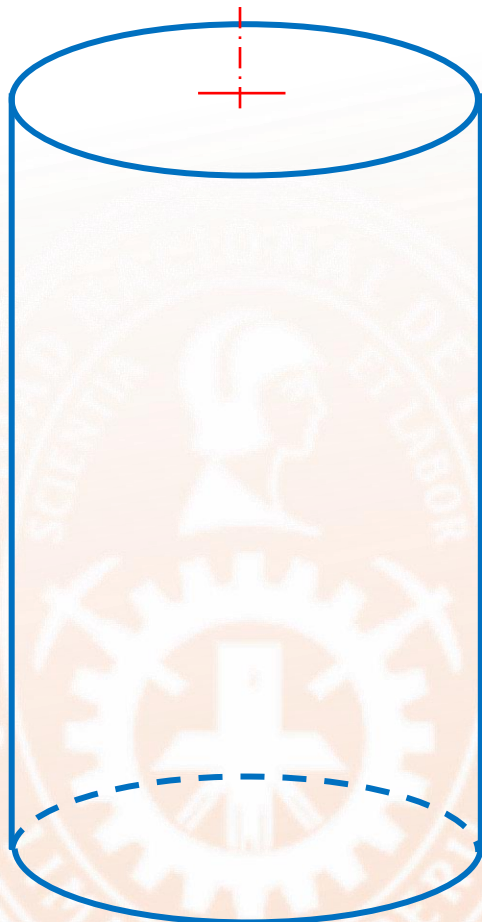
RESOLUCIÓN 03

El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es una región cuadrada cuyo lado mide L . Calcule el volumen del sólido determinado por el cilindro.

$$L = 2\pi r$$



$$h = L$$



Dato:

$$L = 2\pi r \quad r = \frac{L}{2\pi}$$

$$h = L$$

Teorema:

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 (L)$$

$$V = \frac{L^3}{4\pi}$$

Clave: A

EJERCICIO 04

En un cilindro oblicuo de sección recta circular, la recta mediatriz de una generatriz que mide g y la recta perpendicular a una de las bases en el centro, se intersecan en un extremo de la generatriz diametralmente opuesta. ¿Cuál es el volumen del solido determinado por el cilindro oblicuo?

A) $\frac{3\pi g^3}{16}$

B) $\frac{3\pi g^3}{8}$

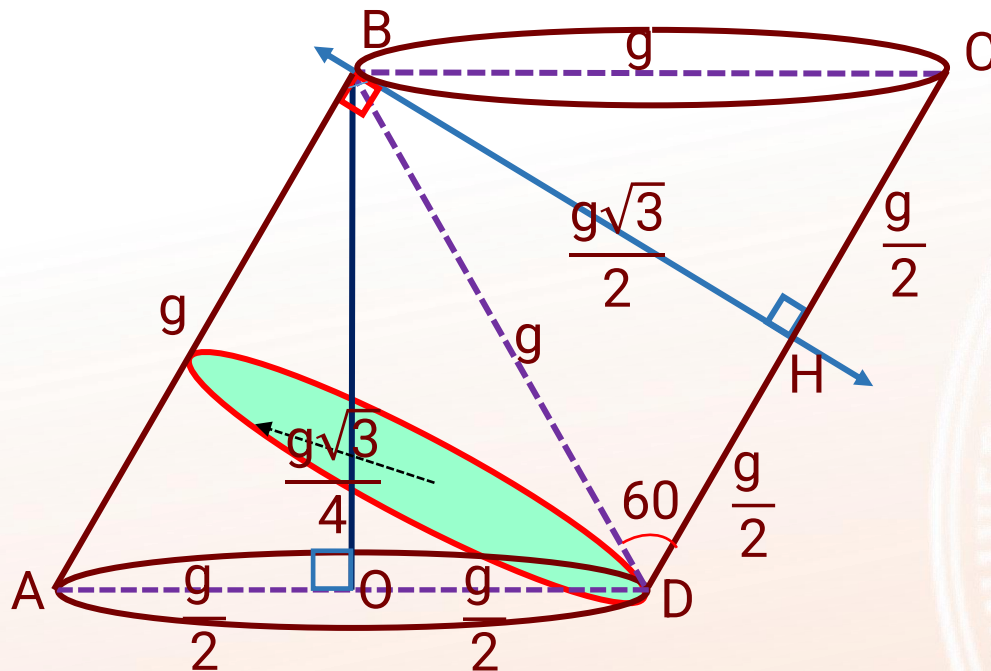
C) $\frac{3\pi g^3}{2}$

D) $\frac{3\pi g^3}{4}$

E) $3\pi g^3$

RESOLUCIÓN 04

En un cilindro oblicuo de sección recta circular, la recta mediatriz de una generatriz que mide g y la recta perpendicular a una de las bases en el centro, se intersectan en un extremo de la generatriz diametralmente opuesta. ¿Cuál es el volumen del sólido determinado por el cilindro oblicuo?



Calcule el volumen V del sólido determinado por el cilindro oblicuo

Dato: $AO=OD$, entonces $\triangle ABD$ es isósceles ($AB = BD = g$)

Teorema de la mediatriz :

$BD = BC = g \Rightarrow \triangle DBC$ es equilátero.

$\overline{BH}$ es diámetro de la sección recta circular del cilindro oblicuo.

Teorema: $V = (A_{S.R.})\left(\frac{g}{2}\right)$

$$V = \pi\left(\frac{g\sqrt{3}}{4}\right)^2 \cdot g \Rightarrow V = \frac{3\pi g^3}{16}$$

Clave: A

EJERCICIO 05

El área total de un cilindro recto de revolución es S . Calcule la longitud del radio de la base para que el volumen sea máximo.

A) $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

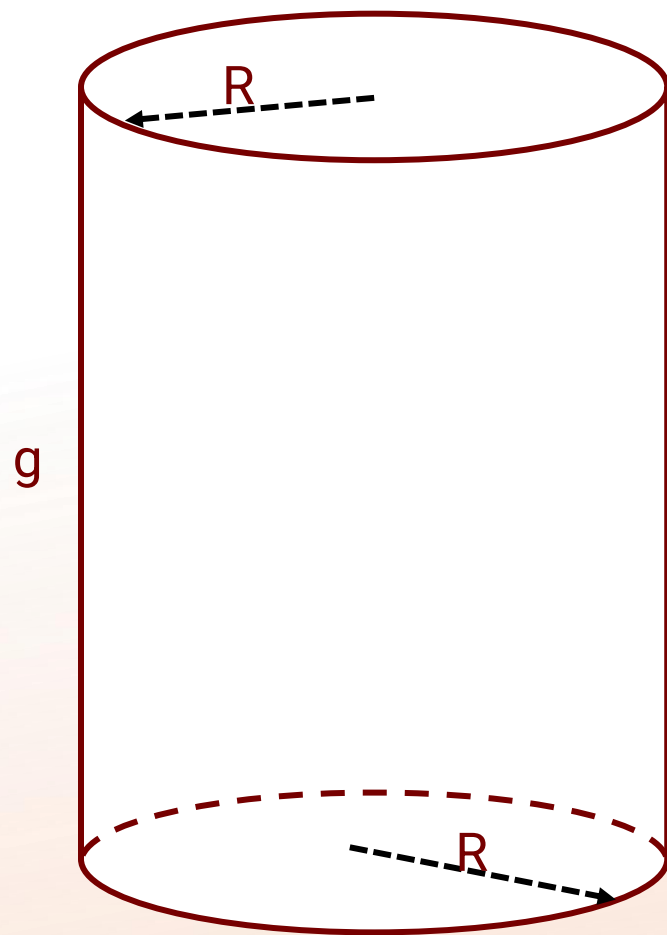
D) $\sqrt{\frac{3S}{2\pi}}$

B) $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

E) $\sqrt{\frac{5S}{6\pi}}$

C) $\sqrt{\frac{2S}{\pi}}$

RESOLUCIÓN 05



El área total de un cilindro recto de revolución es S . Calcule la longitud del radio de la base para que el volumen sea máximo.

- Calcule R
- Datos: $A_{\text{TOTAL}} = S$
- $S = 2\pi Rg + 2\pi R^2$

$$\frac{S}{2\pi} = Rg + R^2 \rightarrow Rg = \frac{S}{2\pi} - R^2$$

- $V_x = \pi R^2 g = \pi Rg \cdot R$

$$V_x = \pi \left(\frac{S}{2\pi} - R^2 \right) (R^2)^{1/2}$$

$$\bullet V_x: \text{máximo} \rightarrow \frac{\frac{S}{2\pi} - 3R^2}{R^2} = \frac{1}{1/2}$$

$$R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

Clave: A

EJERCICIO 06

Dos cilindros circulares rectos tienen el mismo eje y las bases coplanares, el plano determinado por dos generatrices del cilindro mayor que contiene a solo una generatriz del cilindro menor determina en el cilindro mayor una sección cuadrada. Si la generatriz mide g , calcule el volumen del sólido determinado por los cilindros.

A) $\frac{\pi g^3}{8}$

B) $\frac{\pi g^3}{4}$

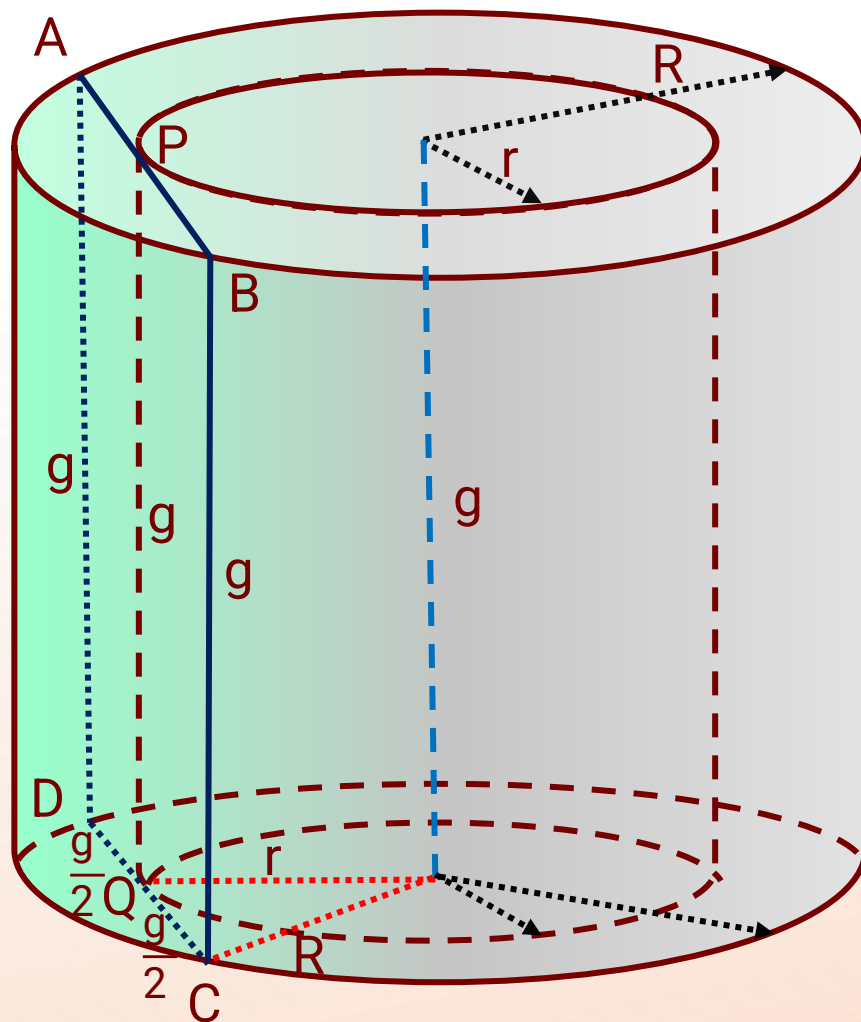
C) $\frac{\pi g^3}{2}$

D) πg^3

E) $\pi g^3 \sqrt{2}$

RESOLUCIÓN 06

Dos cilindros circulares rectos tienen el mismo eje y las bases coplanares, el plano determinado por dos generatrices del cilindro mayor que contiene a solo una generatriz del cilindro menor determina en el cilindro mayor una sección cuadrada. Si la generatriz mide g , calcule el volumen del sólido determinado por los cilindros.



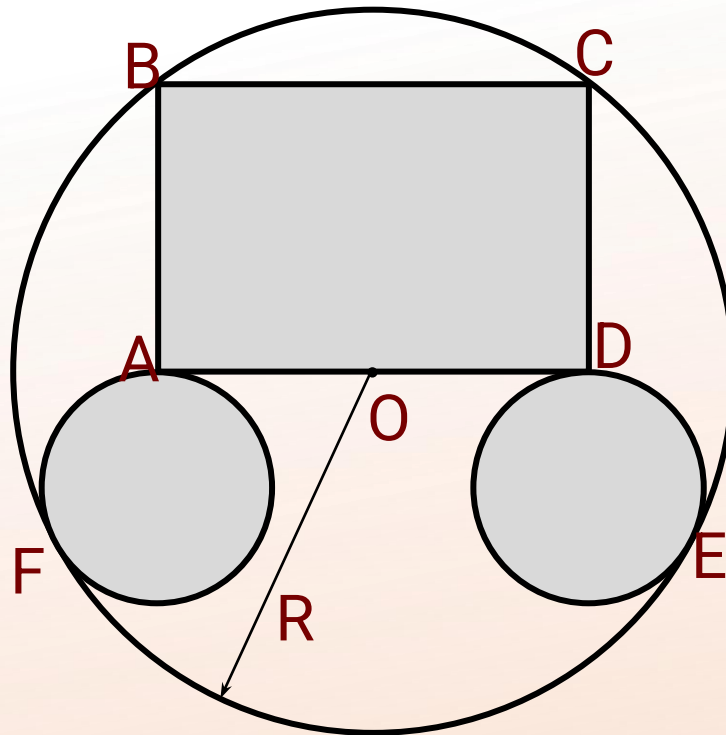
- Calcule: $V_{\text{comprendido entre}} = V_x$ los cilindros
- $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$: generatrices del cilindro mayor
 $\overline{PQ}$: generatriz del cilindro menor.
- Datos: ABCD es cuadrado
- $V_x = \pi(R^2 - r^2)g$
- Se sabe que: $R^2 - r^2 = \frac{g^2}{4}$

$$V_x = \pi\left(\frac{g^2}{4}\right)g \quad V_x = \pi \frac{g^3}{4}$$

Clave: B

EJERCICIO 07

En la figura se muestra el desarrollo de la superficie total de un cilindro circular recto de generatriz $\overline{AB}$ siendo A,D,E y F puntos de tangencia. Calcule el volumen del sólido determinado por el cilindro.



A) $\frac{R^3\sqrt{5}}{\pi^4} (\sqrt{1 + \pi^2} - 1)^{\frac{5}{2}}$

B) $\frac{R^3\sqrt{3}}{\pi^4} (\sqrt{1 + \pi^2} - 1)^{\frac{5}{2}}$

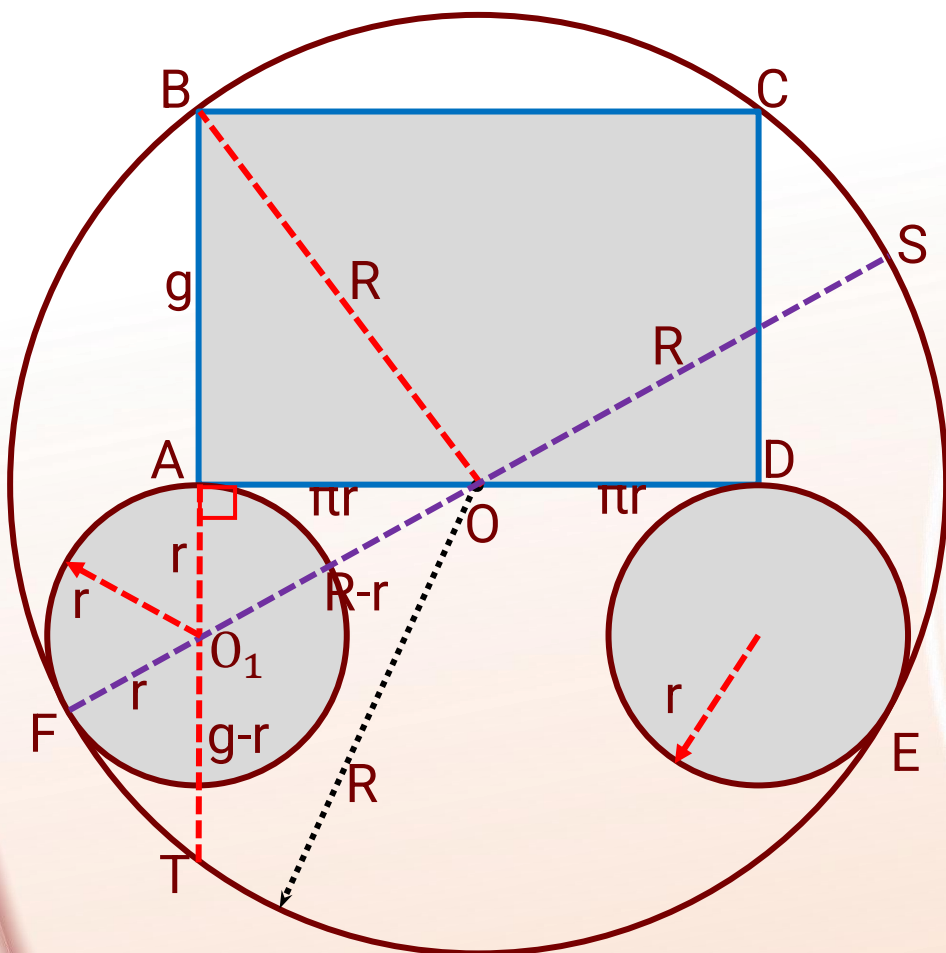
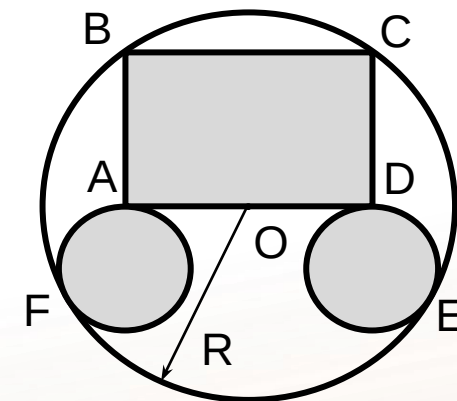
C) $\frac{R^3\sqrt{2}}{\pi^4} (\sqrt{1 + \pi^2} - 1)^{\frac{5}{2}}$

D) $\frac{R^3\sqrt{6}}{\pi^4} (\sqrt{1 + \pi^2} - 1)^{\frac{5}{2}}$

E) $\frac{R^3\sqrt{6}}{\pi^4} (\sqrt{1 + \pi^2} - 1)^{\frac{5}{2}}$

RESOLUCIÓN 07

En la figura se muestra el desarrollo de la superficie total de un cilindro circular recto de generatriz $\overline{AB}$ siendo A,D,E y F puntos de tangencia. Calcule el volumen del sólido determinado por el cilindro.



Calcule: $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 g$

Las cuerdas $\overline{TB}$ y $\overline{FS}$ son secantes en O_1

T. de cuerdas: $(BO_1)(O_1T) = (FO_1)(O_1S)$

reemplazando: $(g + r)(g - r) = (r)(2R - r) \rightarrow g^2 = 2Rr \dots (1)$

• $\Delta BAO: R^2 = g^2 + (\pi r)^2 \dots (2)$

• De (1) y (2): $\pi^2 r^2 + 2Rr - R^2 = 0 \quad r = \frac{R(\sqrt{1+\pi^2}-1)}{\pi^2}$

• $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 g = \pi r^2 (2Rr)^{\frac{1}{2}} = \pi (2R)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{5}{2}}$

$V_{\text{cilindro}} = \frac{R^3 \sqrt{2}}{\pi^4} (\sqrt{1+\pi^2}-1)^{\frac{5}{2}}$

Clave: C